

MATH-F204

Jonathan Junné : Jonathan.Junne@ulb.ac.be

2017-2018

Table des matières

1	Avant-propos	3
2	Coordonnées	4
2.1	Définitions préliminaires	4
2.2	Coordonnées cylindriques	4
2.2.1	Position	4
2.2.2	Vitesse	5
2.2.3	Accélération	5
2.2.4	Éléments infinitésimaux	5
2.3	Coordonnées sphériques	6
2.3.1	Position	6
2.3.2	Vitesse	7
2.3.3	Accélération	7
2.3.4	Éléments infinitésimaux	7
3	Champs scalaires et vectoriels	8
3.1	Définitions préliminaires	8
3.2	Opérateurs vectoriels et théorème de Stokes	10
3.2.1	Opérateurs vectoriels	10
3.2.2	Théorème de Stokes	11
3.3	Caractérisation des champs	12
3.3.1	Champs à circulation conservative	12
3.3.2	Champs à flux conservatif	13
3.4	Champs de vecteurs équiprojectifs	15
3.4.1	Le torseur	15
3.4.2	Cas particuliers de torseurs	16
4	Cinématique et référentiels	18
4.1	Définitions préliminaires	18
4.2	Formules de changement de référentiels	20
4.2.1	Relation de Varignon-Bour	20
4.2.2	Loi de composition des vitesses	21
4.2.3	Loi de composition des accélérations	22

5	Cinétique	23
5.1	Définitions préliminaires	23
5.2	Caractérisation de éléments cinétiques et théorèmes de Koenig .	24
5.2.1	Impulsion	24
5.2.2	Moment cinétique et premier théorème de Koenig	25
5.2.3	Énergie cinétique et second théorème de Koenig	26
5.2.4	Moment d'inertie	27
5.2.5	Calcul des éléments cinétique d'un solide	29
6	Dynamique	31
6.1	Généralités sur les forces	31
6.1.1	Torseur de force et travail	31
6.1.2	Force gravitationnelle	34
6.1.3	Force de réaction et condition de roulement sans glissement	35
6.2	Théorèmes de la dynamique du solide et applications	35
6.2.1	Loi fondamentale et caractérisation des référentiels	35
6.2.2	Théorème de l'impulsion	36
6.2.3	Théorème du moment cinétique	36
6.2.4	Théorème de l'énergie cinétique	39
6.2.5	Pendule de Foucault et expérience d'Eötvös	40
6.2.6	Lois de Kepler et le problème à deux corps	44

1 Avant-propos

La synthèse suivante du cours de MATH-F204 de mécanique analytique est destiné aux étudiants de ce cours. Merci de me signaler toute erreur.

Cette synthèse est basée sur les notes de Laura Peralvo que je remercie.

Je remercie également Eliott Van Steirteghem pour la réalisation de certains schémas.

2 Coordonnées

2.1 Définitions préliminaires

Définition 2.1. Soit $\overrightarrow{\text{OM}}$ le **vecteur position** dans un système de coordonnées R . L'expression de $\overrightarrow{\text{OM}}$ dans la base usuelle est

$$\overrightarrow{\text{OM}} = x_i \hat{x}^i$$

Définition 2.2. Soit R' un système de coordonnées. Un **vecteur** \vec{x}'_i de $\overrightarrow{\text{OM}}$ dans R' est défini par

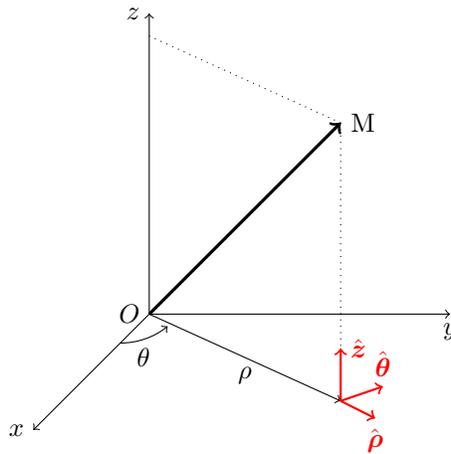
$$\vec{x}'_i = \partial_i x_j \hat{x}^j$$

Proposition 2.3. Règle de la chaîne

$$\partial_i \vec{x}' = \partial'_j \vec{x}' \partial_i x'^j$$

2.2 Coordonnées cylindriques

2.2.1 Position



Le vecteur position est donné par la définition 2.1.

$$\overrightarrow{\text{OM}} = \rho \cos \theta \hat{x} + \rho \sin \theta \hat{y} + z \hat{z} \quad (1)$$

Les vecteurs unitaires sont donnés par la définition 2.2.

$$\begin{cases} \hat{\rho} &= \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \\ \hat{\theta} &= -\sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y} \\ \hat{z} &= \hat{z} \end{cases} \quad (2)$$

On considère le vecteur position $\overrightarrow{\text{OM}}$ et le déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{\text{OM}}$. Le rayon varie de ρ à $\rho + d\rho$, le vecteur orthoradial de θ à $\theta + d\theta$ et la hauteur de z à $z + dz$.

$$\overrightarrow{\text{OM}} = \rho \hat{\rho} + z \hat{z} \quad (3)$$

Les dérivées des vecteurs unitaires par rapport au temps sont données par la proposition 2.3.

$$\begin{cases} \dot{\hat{\rho}} &= \frac{d\hat{\rho}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= \dot{\theta} \hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= -\dot{\theta} \hat{\rho} \\ \dot{\hat{z}} &= \vec{0} \end{cases} \quad (4)$$

2.2.2 Vitesse

$$\begin{aligned} \dot{\overrightarrow{\text{OM}}} &= \frac{d(\rho \hat{\rho})}{dt} + \frac{d(z \hat{z})}{dt} \\ &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\hat{\rho}} + \dot{z} \hat{z} + z \dot{\hat{z}} \end{aligned}$$

L'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques est alors

$$\dot{\overrightarrow{\text{OM}}} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{z} \quad (5)$$

2.2.3 Accélération

$$\begin{aligned} \ddot{\overrightarrow{\text{OM}}} &= \frac{d(\dot{\rho} \hat{\rho})}{dt} + \frac{d(\rho \dot{\theta} \hat{\theta})}{dt} + \frac{d(\dot{z} \hat{z})}{dt} \\ &= \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho} \dot{\hat{\rho}} + \dot{\rho} \dot{\theta} \hat{\theta} + \rho \ddot{\theta} \hat{\theta} + \rho \dot{\theta} \dot{\hat{\theta}} + \ddot{z} \hat{z} + \dot{z} \dot{\hat{z}} \end{aligned}$$

L'expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques est alors

$$\ddot{\overrightarrow{\text{OM}}} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \hat{\rho} + (2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta}) \hat{\theta} + \ddot{z} \hat{z} \quad (6)$$

2.2.4 Éléments infinitésimaux

$$d\overrightarrow{\text{OM}} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\theta \hat{\theta} + dz \hat{z} \quad (7)$$

$$dS_\rho = \rho d\theta dz \quad (8)$$

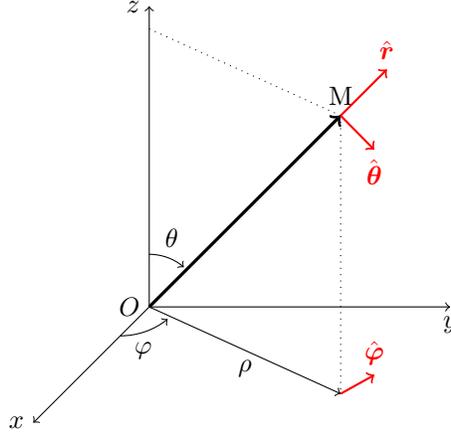
$$dS_\theta = d\rho dz \quad (9)$$

$$dS_z = \rho d\rho d\theta \quad (10)$$

$$dV = \rho d\rho d\theta dz \quad (11)$$

2.3 Coordonnées sphériques

2.3.1 Position



Le vecteur position est donnée par la définition 2.1.

$$\overrightarrow{OM} = r \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + r \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z} \quad (12)$$

Les vecteurs unitaires sont donnés par la définition 2.2.

$$\begin{cases} \hat{r} &= \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \varphi \hat{x} + \cos \theta \sin \varphi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y} \end{cases} \quad (13)$$

On considère le vecteur position \overrightarrow{OM} et le déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{OM}$. Le rayon varie de r à $r + dr$, la colatitute de θ à $\theta + d\theta$ et la longitude de φ à $\varphi + d\varphi$.

$$\overrightarrow{OM} = r \hat{r} \quad (14)$$

Les dérivées des vecteurs unitaires par rapport au temps sont données par la proposition 2.3.

$$\begin{cases} \dot{\hat{r}} &= \frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \dot{\theta} \hat{\theta} + \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\varphi} \\ \dot{\hat{\theta}} &= \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\dot{\theta} \hat{r} + \cos \theta \dot{\varphi} \hat{\varphi} \\ \dot{\hat{\varphi}} &= \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= -\dot{\varphi} (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) \end{cases} \quad (15)$$

2.3.2 Vitesse

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OM}} &= \frac{d(r\hat{r})}{dt} \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}\end{aligned}$$

L'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques est alors

$$\overrightarrow{\text{OM}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi} \quad (16)$$

2.3.3 Accélération

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OM}} &= \frac{d(\dot{r}\hat{r})}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\hat{\theta})}{dt} + \frac{d(r\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi})}{dt} \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} + \dot{r}\sin\theta\dot{\varphi}\hat{\varphi} - r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\hat{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi}\hat{\varphi} + r\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\hat{\varphi}}\end{aligned}$$

L'expression du vecteur accélération en coordonnées sphériques est alors

$$\overrightarrow{\text{OM}} = (\ddot{r} - \dot{r}\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2)\hat{\theta} + (r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{\varphi}\dot{r} + 2r\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta})\hat{\varphi} \quad (17)$$

2.3.4 Éléments infinitésimaux

$$d\overrightarrow{\text{OM}} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi} \quad (18)$$

$$dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad (19)$$

$$dS_\theta = r \sin\theta dr d\varphi \quad (20)$$

$$dS_\varphi = r dr d\theta \quad (21)$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (22)$$

3 Champs scalaires et vectoriels

3.1 Définitions préliminaires

Définition 3.1. Un **champ scalaire** ϕ est une application

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \phi(M)$$

telle que $\phi'(M') = \phi(M)$ si $\overrightarrow{O'M'} = R(M)$ où $R \in SO(3)$.

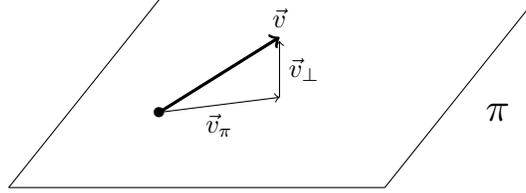
Remarque 3.2. Si $R \in O(3)$ et $\det R = -1$, donc plus particulièrement $\phi'(M') = -\phi(M)$, alors ϕ est un **pseudo-champ scalaire**.

Définition 3.3. Un **champ vectoriel** \vec{a} est une application

$$\vec{a} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, M \mapsto \vec{a}(M)$$

telle que $a'_i(M') = R_{ij}a^j(M)$ où $R \in SO(3)$.

Définition 3.4. Soit $R \in O(3)$ une matrice qui transforme les coordonnées, $x'_i = R_{ij}x^j$. Alors un vecteur \vec{v} est un **vrai vecteur** si $v'_i = R_{ij}v^j$. Si $v'_i = -R_{ij}v^j$, il s'agit d'un **pseudo-vecteur**.



Remarque 3.5. Soit $\vec{v} = \vec{v}_\pi + \vec{v}_\perp$. On considère $R \in O(3)$ une inversion. Si \vec{v} est un **vrai vecteur**, alors

$$\vec{v}_\pi \mapsto \vec{v}_\pi, \vec{v}_\perp \mapsto -\vec{v}_\perp$$

Si \vec{v} est un **pseudo-vecteur**, alors

$$\vec{v}_\pi \mapsto -\vec{v}_\pi, \vec{v}_\perp \mapsto \vec{v}_\perp$$

On note usuellement \vec{v} un pseudo-vecteur.

Remarque 3.6. Le **produit vectoriel** de deux vrais vecteurs ou de deux pseudo-vecteurs est un pseudo-vecteur.

Définition 3.7. Une **ligne de champ** pour le champ vectoriel \vec{a} est une courbe dont le vecteur tangent est parallèle au champ en chacun de ses points.

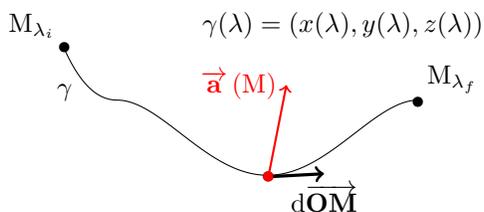
$$d\overrightarrow{OM} \times \vec{a}(M) = \vec{0}$$

Remarque 3.8. On **oriente** en général les lignes de champ dans le sens du champ vectoriel.

Définition 3.9. La **circulation** de \vec{a} le long de γ orientée est

$$\int_{\gamma} \vec{a}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \vec{a}(M_{\lambda}) \cdot \vec{v}(\lambda) d\lambda$$

où $d\vec{OM} = \vec{v}(\lambda) d\lambda$ avec $\vec{v}(\lambda)$ un vecteur tangent au chemin orienté γ .



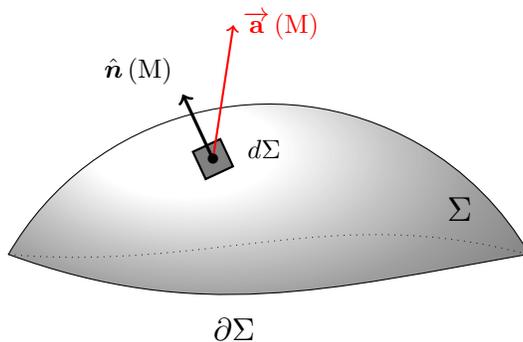
Définition 3.10. Le **flux** de \vec{a} à travers une surface Σ orientée est

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{a}(M) \cdot \hat{n}(M) d\Sigma$$

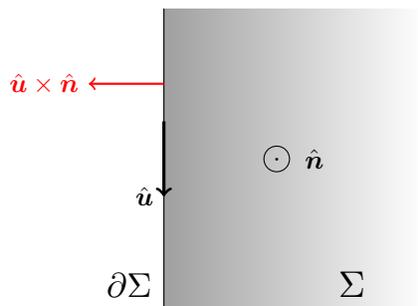
où $\hat{n}(M)$ est le champ de vecteur normal unitaire à la surface Σ et

$$d\Sigma = ||d\vec{OM}_u \times d\vec{OM}_v||$$

avec $\vec{OM}(u, v)$.



Remarque 3.11. On choisit l'**orientation d'une surface** Σ et de son **bord** $\partial\Sigma$ en utilisant la règle du tire-bouchon.



3.2 Opérateurs vectoriels et théorème de Stokes

3.2.1 Opérateurs vectoriels

Définition 3.12. Le **gradient** $\overrightarrow{\text{grad}}$ agit sur champ scalaire ϕ tel que

$$d\phi(M) = \overrightarrow{\text{grad}} \phi(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}}$$

La différentielle de ϕ est

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}dr + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}d\varphi$$

respectivement pour les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

L'expression du gradient est donné par la définition 3.12 en utilisant les éléments infinitésimaux de déplacement (7) et (18)

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \quad (23)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \quad (24)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (25)$$

respectivement pour les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Proposition 3.13. $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ est un champ vectoriel.

Démonstration. On part de la définition du gradient $\left(\overrightarrow{\text{grad}} \phi\right)_i = \partial_i \phi$. ϕ étant un champ scalaire, $\phi'(M') = \phi(M)$ si $(M') = R(M)$ où $R \in SO(3)$. En appliquant la proposition 2.3, il advient que

$$\begin{aligned} \partial'_i \phi'(M') &= \partial_j \phi(M) \partial'_i \phi^j(M) \\ &= R_{ji}^{-1} \partial^j \phi(M) \\ &= R_{ij} \partial^j \phi(M) \end{aligned}$$

□

Définition 3.14. La **divergence** div agit sur un champ vectoriel $\overrightarrow{\mathbf{a}}$ tel que

$$\text{div} \overrightarrow{\mathbf{a}}(M) = \partial_i a^i(M)$$

Définition 3.15. Le **rotationnel** $\overrightarrow{\text{rot}}$ agit sur un champ vectoriel $\vec{\mathbf{a}}$ tel que

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathbf{a}}(M)\right)_i = \epsilon_{ijk} \partial^j a^k(M)$$

Définition 3.16. Le **Laplacien** Δ agit sur un champ scalaire ϕ ou un champ vectoriel $\vec{\mathbf{a}}$ tel que

$$\begin{aligned} \Delta \phi(M) &= \partial_i \partial^i \phi(M) \\ (\Delta \vec{\mathbf{a}}(M))_i &= \partial_j \partial^j a_i(M) \end{aligned}$$

3.2.2 Théorème de Stokes

Théorème 3.17. Théorème de Stokes

(i)

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{\text{grad}} \phi(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}} = \phi(Q) - \phi(P)$$

pour γ différentiable de P à Q.

(ii)

$$\iint_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}}$$

avec l'orientation de la remarque 3.11.

(iii)

$$\iiint_{\Omega} \text{div} \vec{\mathbf{a}}(M) d\Omega = \iint_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Sigma$$

avec l'orientation de la remarque 3.11.

Le théorème 3.17 permet de calculer aisément la divergence et le rotationnel dans d'autres systèmes de coordonnées.

La divergence de $\vec{\mathbf{a}}$ est donnée par le théorème 3.17 en utilisant les éléments infinitésimaux de déplacement (7) et (18) et les éléments infinitésimaux de surface et de volume (8, ..., 11) et (19, ..., 22)

$$\text{div} \vec{\mathbf{a}} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (26)$$

$$\text{div} \vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\theta}{\partial \rho} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (27)$$

$$\text{div} \vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(a_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \quad (28)$$

respectivement pour les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

Le rotationnel de \vec{a} est donné par le théorème 3.17 en utilisant les éléments infinitésimaux de déplacement (7) et (18) et les éléments infinitésimaux de surface et de volume (8, ..., 11) et (19, ..., 22)

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (29)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho a_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \theta} \right) \hat{z} \quad (30)$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{a} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (a_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r a_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi} \quad (31)$$

respectivement pour les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

3.3 Caractérisation des champs

3.3.1 Champs à circulation conservative

Définition 3.18. Un champ vectoriel \vec{a} conservatif (ou dérivant d'un potentiel ϕ) vérifie l'une des propriétés suivantes

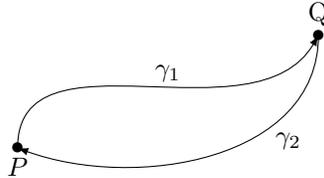
- (i) $\exists \phi$ tel que $\vec{a} = -\vec{\text{grad}} \phi$
- (ii) $\oint_\gamma \vec{a} (M) \cdot d\vec{\text{OM}} = 0$
- (iii) $\int_\gamma \vec{a} (M) \cdot d\vec{\text{OM}}$ ne dépend que des extrémités de γ
- (iv) $\vec{\text{rot}} \vec{a} = \vec{0}$

Proposition 3.19. Ces propriétés sont équivalentes.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii).

$$\oint_\gamma \vec{a} (M) \cdot d\vec{\text{OM}} = - \oint_\gamma d\phi = 0$$

(ii) \Rightarrow (iii).



Si $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ où γ_1 va de $\vec{\text{OP}}$ à $\vec{\text{OQ}}$ et γ_2 de $\vec{\text{OQ}}$ à $\vec{\text{OP}}$, alors

$$\oint_\gamma \vec{a} (M) \cdot d\vec{\text{OM}} = 0 = \int_{\gamma_1} \vec{a} (M) \cdot d\vec{\text{OM}} + \int_{\gamma_2} \vec{a} (M) \cdot d\vec{\text{OM}}$$

(iii) \Rightarrow (iv).

$$\oiint_{\Sigma} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M) \right) \cdot \hat{n} d\Sigma = \oint_{\partial\Sigma} \vec{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}} = 0$$

(iv) \Rightarrow (i). Il suffit de montrer (iv) \Rightarrow (ii) et (iii) \Rightarrow (i).

$$0 = \iint_{\Sigma} \left(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}(M) \right) \cdot \hat{n} d\Sigma = \oint_{\gamma} \vec{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}}$$

Pour la dernière implication, $\phi(P) = -\int_{\gamma_{O \rightarrow P}} \vec{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}}$ est une fonction qui ne dépend que de $\overrightarrow{\text{OP}}$. Si l'on note $\overrightarrow{\text{OP}'} = \overrightarrow{\text{OP}} + d\overrightarrow{\text{OP}}$ et $\gamma'' = \gamma \cup \gamma'$ où γ va de O à P et γ' de P à P', alors

$$\begin{aligned} -d\phi(P) &= \int_{\gamma''} \vec{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}} - \int_{\gamma} \vec{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}} \\ &= \int_{\gamma'} \vec{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}} \\ &= \vec{a}(P) \cdot d\overrightarrow{\text{OP}} \end{aligned}$$

□

Remarque 3.20. Lorsque le champ \vec{a} est conservatif,

- (i) Les lignes de champ sont **perpendiculaires** aux **surface équipotentiellles**. En effet,

$$d\phi(M) = \overrightarrow{\text{grad}} \phi(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}} = -\vec{a}(M) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}}$$

mais $d\overrightarrow{\text{OM}}$ est sur la surface, donc $\vec{a}(M)$ est perpendiculaire à la surface.

- (ii) Les lignes de champ **ne sont jamais fermées**.

3.3.2 Champs à flux conservatif

Lemme 3.21. Si \vec{A} est un potentiel vecteur de \vec{a} (i.e. $\vec{a} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$), alors $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ est aussi un potentiel vecteur pour \vec{a} .

Démonstration. $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} \phi = \vec{0}$ □

Cette ambiguïté permet d'imposer des conditions sur \vec{A} . Il s'agit du choix de jauge. Par exemple, on peut imposer une jauge axiale selon \hat{u} (i.e. $\vec{A} \cdot \hat{u} = 0$).

Définition 3.22. Un champ vectoriel \vec{a} à **flux conservatif** vérifie l'une des propriétés suivantes

- (i) $\vec{a}(M) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}(M)$
(ii) $\oiint_{\Sigma} \vec{a}(M) \cdot \hat{n}(M) d\Sigma = 0$

(iii) $\iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{a}}(M) \cdot \hat{\mathbf{n}}(M) d\Sigma$ ne dépend que de $\partial\Sigma$

(iv) $\operatorname{div} \vec{\mathbf{a}} = 0$

où $\vec{\mathbf{A}}$ est un potentiel vecteur de $\vec{\mathbf{a}}$.

Proposition 3.23. Ces propriétés sont équivalentes.

Démonstration. (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) sont similaires à la démonstration précédente. Il reste à montrer (iv) \Rightarrow (i). Construisons $\vec{\mathbf{A}}$ explicitement. On peut imposer une jauge axiale selon $\hat{\mathbf{z}}$ par le lemme 3.21. En choisissant $\frac{\partial\phi}{\partial z} = -A_z$, on obtient $A'_z = 0$. Sachant que l'on veut montrer que $\vec{\mathbf{a}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}$, il suffit de trouver $\vec{\mathbf{A}}$ tel que

$$\left(-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = (a_x, a_y, a_z)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} = -a_x$$

$$A_y(x, y, z) = -\int_0^z dz' a_x(x, y, z') + f(x, y)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = a_y$$

$$A_x(x, y, z) = \int_0^z dz' a_y(x, y, z') + g(x, y)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = a_y$$

$$= \int_0^z dz' \left(\frac{\partial dz' a_x(x, y, z')}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z')}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$$

Il ne faut pas dépendance générique en $\hat{\mathbf{z}}$, mais puisque $\operatorname{div} \vec{\mathbf{a}} = 0$, $-\frac{\partial a_z(x, y, z')}{\partial z} = \frac{\partial a_x(x, y, z')}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z')}{\partial y}$. Ceci implique que

$$a_z(x, y, z') = a_z(x, y, z) - a_z(x, y, 0) + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}$$

En prenant $g = 0$, et $f(x, y) = \int_0^x dx' a_z(x', y, 0)$, on a bien construit un tel $\vec{\mathbf{A}}$. \square

Remarque 3.24. Pour un champ à flux conservatif, on peut définir le **flux à travers un contour orienté fermé** \mathcal{C} qui est le flux à travers n'importe quelle surface Σ telle que $\partial\Sigma = \mathcal{C}$.

Remarque 3.25. Le **théorème de Helmholtz-Hodge** assure que tout champ vectoriel $\vec{\mathbf{a}}$ satisfaisant certaines conditions peut **se décomposer** en une **composante longitudinale à circulation conservative** et une **composante transverse à flux conservatif**.

$$\vec{\mathbf{a}} = \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} - \operatorname{grad} \phi$$

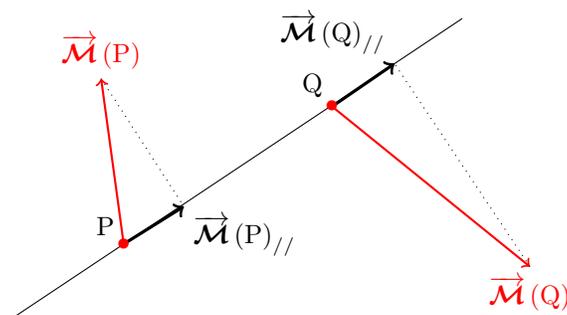
3.4 Champs de vecteurs équiprojectifs

3.4.1 Le torseur

Définition 3.26. Un champ vectoriel $\vec{\mathcal{M}}$ est **équiprojectif** ssi

$$\forall (P, Q), \vec{\mathcal{M}}(P) \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{\mathcal{M}}(Q) \cdot \overrightarrow{PQ}$$

Un torseur est un champ équiprojectif.



Définition 3.27. Soit E un espace euclidien sur \mathbb{R} de dimension n muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $f \in \mathcal{L}(E)$ est **antisymétrique** si $f^T = -f$. La **transposée** de f est l'application $f^T \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\langle x, f(y) \rangle = \langle f^T(x), y \rangle \forall (x, y) \in E^2$.

Lemme 3.28. Soit E un espace euclidien sur \mathbb{R} de dimension n muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $f : E \rightarrow E$ est telle que $\langle x, f(y) \rangle = -\langle f(x), y \rangle \forall (x, y) \in E^2$, alors f est antisymétrique.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle z, f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda f(y) \rangle &= \langle z, f(x + \lambda y) \rangle - \langle z, f(x) \rangle - \lambda \langle z, f(y) \rangle \\ &= -\langle f(z), x + \lambda y \rangle + \langle f(z), x \rangle + \lambda \langle f(z), y \rangle \\ &= -\langle f(z), 0 \rangle \\ &= 0 \forall z \end{aligned}$$

□

Lemme 3.29. Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ antisymétrique, alors $\exists \vec{\mathbf{F}}$ tel que $f(\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{u}}$.

Démonstration. Comme f est antisymétrique, f est linéaire et $f(u_j \hat{\mathbf{u}}^j) = f_{ij} u^j \hat{\mathbf{u}}^i$, $f(\vec{\mathbf{u}})_i = f_{ij} u^j$. Il suffit de trouver $\vec{\mathbf{F}}$ tel que $f_{ij} = -\epsilon_{ijk} F^k$, car alors $f(\vec{\mathbf{u}})_i = -\epsilon_{ijk} u^j F^k = (\vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{u}})_i$. Si $f_{ij} = -\epsilon_{ijk} F^k$, alors $\epsilon^{ijl} f_{ij} = -\epsilon^{ijl} \epsilon_{ijk} F^k = -2F^l$. $F^k = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} f_{ij}$ est le vecteur recherché. □

Lemme 3.30. Soient $\vec{\mathcal{M}}$ un torseur et O un point fixe. L'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{\mathbf{u}} \mapsto \vec{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{u}}) - \vec{\mathcal{M}}(O)$ où $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{OP}$ est antisymétrique.

Démonstration. On veut montrer que $\vec{u} \cdot f(\vec{v}) = -f(\vec{u}) \cdot \vec{v} \forall (\vec{u}, \vec{v}), \vec{u} = \overrightarrow{OP}, \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) \cdot \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) \cdot \overrightarrow{PQ} \\ (\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)) \cdot \overrightarrow{PQ} &= (\overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)) \cdot \overrightarrow{PQ} \\ (\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) &= (\overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \\ (\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)) \cdot \overrightarrow{OQ} &= -(\overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)) \cdot \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $(\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)) \cdot \overrightarrow{OP} = 0 = (\overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)) \cdot \overrightarrow{OQ}$ pour passer de l'avant-dernière à la dernière ligne. \square

Théorème 3.31. Relation de Varignon

$\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est un torseur ssi $\exists \vec{F}$ vecteur fixe tel que $\forall (P, Q)$,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) + \vec{F} \times \overrightarrow{QP}$$

Démonstration. Le sens direct est montré par les lemmes 3.28, 3.29 et 3.30. Si $\exists \vec{F}$ vecteur fixe tel que $\forall (P, Q), \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) + \vec{F} \times \overrightarrow{QP}$, alors en appliquant le produit scalaire par \overrightarrow{PQ} dans les deux membres, $\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q) \cdot \overrightarrow{PQ}$ car $(\vec{F} \times \overrightarrow{QP}) \cdot \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$. \square

Remarque 3.32. Le vecteur \vec{F} du théorème 3.31 est **unique**. Il s'agit de la **résultante** du torseur.

3.4.2 Cas particuliers de torseurs

Définition 3.33. L'axe central du torseur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ de résultante \vec{F} est

$$\{P \text{ tel que } \|\overrightarrow{\mathcal{M}}(P)\| \text{ minimale}\}$$

Il s'agit d'une droite parallèle à \vec{F} .

Définition 3.34. Soient $\vec{\mathcal{T}}_1 = (\vec{F}_1, \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(P))$, $\vec{\mathcal{T}}_2 = (\vec{F}_2, \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(P))$ deux torseurs. Le **comoment** de deux torseurs $\vec{\mathcal{T}}_1$ et $\vec{\mathcal{T}}_2$ est

$$c(\vec{\mathcal{T}}_1, \vec{\mathcal{T}}_2) = \frac{1}{2} (\vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(P) + \vec{F}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(P))$$

Proposition 3.35. Le comoment ne dépend pas de P dans la définition 3.34.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(P) + \vec{F}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1(P) &= \vec{F}_1 \cdot (\vec{\mathcal{M}}_2(Q) + \vec{F}_2 \times \overrightarrow{QP}) + \vec{F}_2 \cdot (\vec{\mathcal{M}}_1(Q) + \vec{F}_1 \times \overrightarrow{QP}) \\ &= \vec{F}_1 \cdot \vec{\mathcal{M}}_2(Q) + \vec{F}_2 \cdot \vec{\mathcal{M}}_1(Q) + \underbrace{\vec{F}_1 \cdot (\vec{F}_2 \times \overrightarrow{QP}) + \vec{F}_2 \cdot (\vec{F}_1 \times \overrightarrow{QP})}_{=0}\end{aligned}$$

□

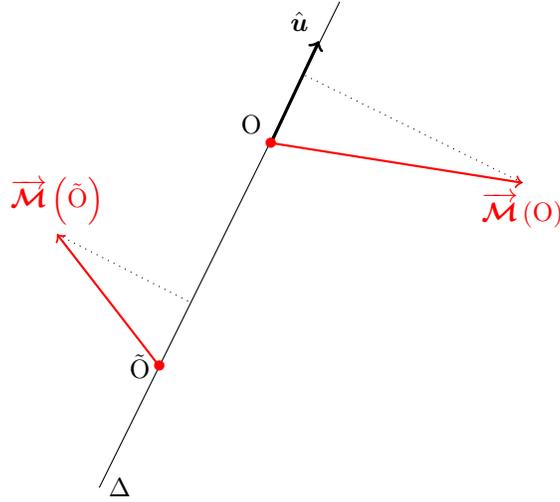
Remarque 3.36. $\mathcal{C}(\vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{T}}) = \vec{F} \cdot \vec{\mathcal{M}}(P)$ est l'**invariant scalaire** du torseur $\vec{\mathcal{T}}$. Les torseurs pour lesquels $\mathcal{C}(\vec{\mathcal{T}}, \vec{\mathcal{T}}) = 0$ sont les **torseurs élémentaires**.

Définition 3.37. Un **couple** est un torseur $\vec{\mathcal{T}}$ de résultante $\vec{F} = \vec{0}$. Il s'agit d'un champ uniforme.

Définition 3.38. Un **glisseur** est un torseur $\vec{\mathcal{T}}$ tel que $\exists O$ où $\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$. Dans ce cas, O appartient à l'axe central du torseur.

Définition 3.39. Soit $\Delta = (O, \hat{u})$ un axe orienté. Le **moment** du torseur par rapport à Δ est

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}(O) \cdot \hat{u}$$



Proposition 3.40. Le moment ne dépend pas de O dans la définition 3.39.

Démonstration. On a que $\vec{\mathcal{M}}(O) \cdot \hat{u} = \vec{\mathcal{M}}(\tilde{O}) \cdot \hat{u}$ pour $(\tilde{O}, \hat{u}) \in \Delta$ par équiprojection. □

4 Cinématique et référentiels

4.1 Définitions préliminaires

Définition 4.1. La **trajectoire** est déterminée selon un paramètre privilégié : le **temps**, via les **équation horaires**.

Définition 4.2. On se donne O un point fixe, \overrightarrow{OM} le vecteur position, et $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ une base orthonormale. Un **référentiel** R est un système de coordonnées $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ (en imposant dans un premier temps que $\dot{\hat{x}} = \dot{\hat{y}} = \dot{\hat{z}} = \vec{0}$).

Remarque 4.3. Ceci définit de manière univoque la **vitesse** et l'**accélération**

$$\begin{aligned}\vec{v}_R &= \left. \overrightarrow{OM} \right|_R = \dot{x}_i \hat{x}^i \\ \vec{a}_R &= \left. \overrightarrow{OM} \right|_R = \ddot{x}_i \hat{x}^i\end{aligned}$$

Définition 4.4. Un **corps rigide** ou **solide indéformable** ou encore **solide** est un ensemble S tel que

$$\forall (P, Q) \in S^2, \frac{d\|\overrightarrow{PQ}(t)\|}{dt} = 0$$

Remarque 4.5. La notions de référentiels et de corps rigides sont **équivalentes** modulo une **translation** et une **rotation**.

Théorème 4.6. Théorème fondamental du champ des vitesses

Le champ des vitesses $\vec{v}(M)$ d'un solide S est un torseur.

Démonstration.

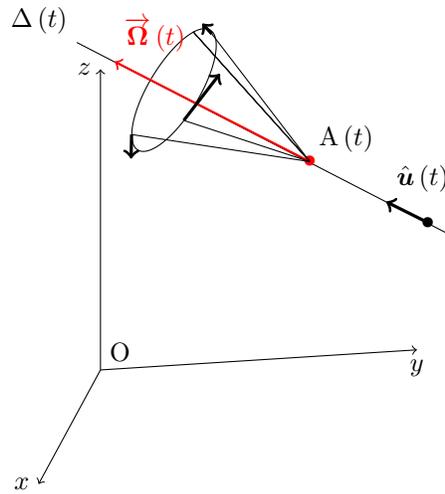
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \dot{\overrightarrow{PQ}} &= 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}(Q) - \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}(P) &= 0\end{aligned}$$

□

La résultante du torseur est le vecteur de **rotation instantanée** $\vec{\Omega}$ et le champ des vitesses est alors donné par le théorème 4.6

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{QP} \quad (32)$$

et $\vec{\mathcal{T}}_c = (\vec{\Omega}(t), \vec{v}(P)(t))$ est le **torseur cinématique** du solide et son axe principal l'**axe instantané de rotation**.



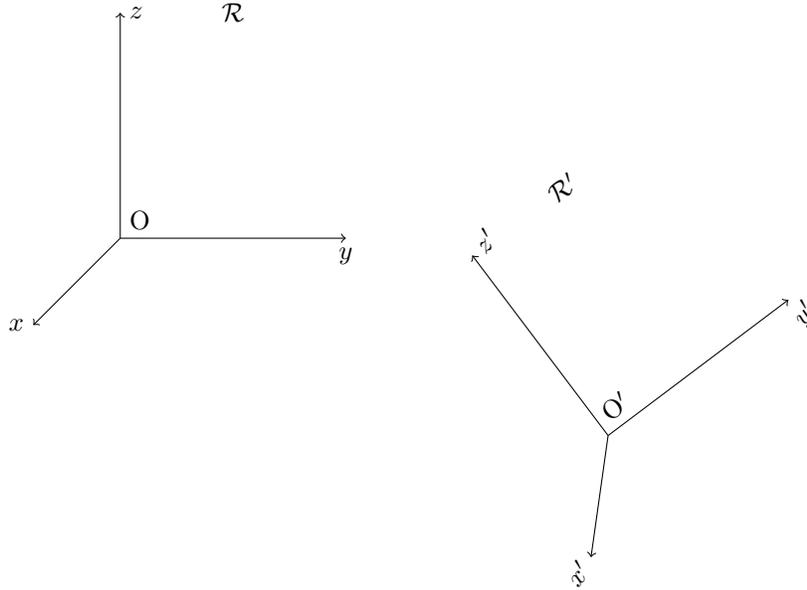
Le champ des accélérations est alors

$$\vec{a}(P) = \vec{a}(Q) + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{QP} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{QP}) \quad (33)$$

Alors que le théorème 4.6 montre que le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif, le champ des accélérations n'est pas équiprojectif vu qu'il ne satisfait pas le théorème 3.31.

4.2 Formules de changement de référentiels

4.2.1 Relation de Varignon-Bour



Le mouvement d'un référentiel R' par rapport à un référentiel R est caractérisé par le torseur cinématique $\vec{\mathcal{T}}_c = \left(\vec{\Omega}_{R'/R}(t), \vec{v}_R(O' \in R') \right)$

Lemme 4.7. Relation de Varignon-Bour

Soit \vec{A} un vecteur,

$$\dot{\vec{A}}|_R = \dot{\vec{A}}|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \times \vec{A}$$

Démonstration. Soit $\vec{A} = A_i \hat{x}^i = A'_i \hat{x}'^i$ où $\hat{x}'^i = \frac{\vec{O'A}'^i}{\|\vec{O'A}'^i\|}$.

$$\begin{aligned} \dot{A}_i \hat{x}^i &= \dot{A}'_i \hat{x}'^i + A'_i \dot{\hat{x}}'^i \\ &= \dot{A}'_i \hat{x}'^i + A'_i \underbrace{\left(\dot{\hat{x}}'(A') - \dot{\hat{x}}'(O') \right)^i}_{= \left(\vec{\Omega}_{R'/R} \times A'_i \hat{x}'^i \right)^i} \end{aligned}$$

□

4.2.2 Loi de composition des vitesses

$$\begin{aligned}\vec{v}_R(M) &= \overrightarrow{\dot{\mathbf{O}\mathbf{M}}}\Big|_R \\ &= \overrightarrow{\dot{\mathbf{O}\mathbf{O}'}}\Big|_R + \overrightarrow{\dot{\mathbf{O}'\mathbf{M}}}\Big|_R\end{aligned}$$

La vitesse de $\overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{M}}$ est alors donnée par le lemme 4.7.

$$\vec{v}_R(M) = \underbrace{\vec{v}_{R'}(M)}_{\vec{v}_r(M)} + \underbrace{\vec{v}_R(O' \in R') + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \times \overrightarrow{\mathbf{O}'\mathbf{M}}}_{\vec{v}_e(M)} \quad (34)$$

où $\vec{v}_r(M)$ et $\vec{v}_e(M)$ sont respectivement la **vitesse relative** et la **vitesse d'entraînement** de $\overrightarrow{\mathbf{O}\mathbf{M}}$.

Proposition 4.8. Formule des indices pour les torseurs

La loi de composition des vitesses permet de déduire pour R'' en mouvement par rapport à R' que

$$\overrightarrow{\mathcal{T}}_{R''/R} = \overrightarrow{\mathcal{T}}_{R''/R'} + \overrightarrow{\mathcal{T}}_{R'/R}$$

pour des torseurs cinématiques ce qui donne en particulier

$$\overrightarrow{\Omega}_{R''/R} = \overrightarrow{\Omega}_{R''/R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R}$$

Remarque 4.9. Le **cas particulier** des torseurs cinématiques est donné par le lemme 4.7.

$$\begin{cases} \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_R &= \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_{R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \times \overrightarrow{\mathbf{A}} \\ \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_{R'} &= \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_R + \overrightarrow{\Omega}_{R/R'} \times \overrightarrow{\mathbf{A}} \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_R = \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_R + (\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} + \overrightarrow{\Omega}_{R/R'}) \times \overrightarrow{\mathbf{A}}$ d'où

$$\overrightarrow{\Omega}_{R'/R} = -\overrightarrow{\Omega}_{R/R'}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_R &= \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_{R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R} \times \overrightarrow{\mathbf{A}} \\ \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_{R'} &= \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_{R''} + \overrightarrow{\Omega}_{R''/R'} \times \overrightarrow{\mathbf{A}} \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_R = \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}}\Big|_{R''} + (\overrightarrow{\Omega}_{R''/R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R}) \times \overrightarrow{\mathbf{A}}$ d'où

$$\overrightarrow{\Omega}_{R''/R} = \overrightarrow{\Omega}_{R''/R'} + \overrightarrow{\Omega}_{R'/R}$$

4.2.3 Loi de composition des accélérations

$$\begin{aligned}\vec{a}_R(M) &= \dot{\vec{v}}_R(M)|_R \\ \vec{a}_R(M) &= \frac{d(\vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M))}{dt}|_R\end{aligned}$$

L'accélération de \overrightarrow{OM} est alors donnée par le lemme 4.7.

$$\vec{a}_R(M) = \underbrace{\vec{a}_{R'}(M)}_{\vec{a}_r(M)} + \underbrace{\vec{a}_R(O' \in R') + \dot{\vec{\Omega}}_{R'/R} \times \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \times (\vec{\Omega}_{R'/R} \times \overrightarrow{O'M})}_{\vec{a}_e(M)} + \underbrace{2\vec{\Omega}_{R'/R} \times \vec{v}_{R'}(M)}_{\vec{a}_c(M)} \quad (35)$$

où $\vec{a}_r(M)$, $\vec{a}_e(M)$ et $\vec{a}_c(M)$ sont respectivement l'**accélération relative**, l'**accélération d'entraînement** et l'**accélération de Coriolis** de \overrightarrow{OM} .

5 Cinétique

5.1 Définitions préliminaires

Définition 5.1. Les **éléments cinétiques** sont les principales quantités physiques associées aux mouvements d'un système de points matériels.

Définition 5.2. Soit Σ un système de points matériels A_i de masses inertielles m_i . La réunion de **sous-systèmes** $\Sigma_\alpha = \{A_{\alpha,i}, 1 \leq i \leq N\}$ est telle que

$$\Sigma = \cup_{\alpha=1}^n \Sigma_\alpha$$

Remarque 5.3. Cette notion de sous-systèmes mène à une **description continue**. Le volume considéré du système étant infinitésimal, on peut faire correspondre le point du sous-système à son centre de gravité G_α . La masse de chaque sous-système Σ_α est alors $M_\alpha = \rho(G_\alpha) dV_\alpha$ où $\rho(G_\alpha)$ est la densité massique. La **masse totale** du système Σ est alors

$$M = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{\alpha=1}^n M_\alpha = \iiint_{\Sigma} \rho(A) dV$$

Définition 5.4. Le **centre de masse** de Σ est l'unique point G tel que

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GA}_i = \vec{0}$$

Remarque 5.5. Dans la description continue, la **position** du centre de masse est alors

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{OM} \rho(A) dV$$

Définition 5.6. Le **référentiel du centre de masse** R^* est le référentiel de centre G en **translation** par rapport à R inertiel.

La vitesse de \overrightarrow{OG} est donnée par (34).

$$\begin{aligned} \vec{v}_R(A_i) &= \vec{v}_r(A_i) + \vec{v}_e(A_i) \\ &= \vec{v}_{R^*}(A_i) + \vec{v}_R(G \in R^*) + \vec{\Omega}_{R^*/R} \times \overrightarrow{GA}_i \end{aligned}$$

Le référentiel R^* étant en translation avec R , $\vec{\Omega}_{R^*/R} = \vec{0}$ et la vitesse de \overrightarrow{OG} est alors

$$\vec{v}_R(A_i) = \vec{v}_{R^*}(A_i) + \vec{v}_R(G \in R^*) \quad (36)$$

Remarque 5.7. Afin de **simplifier les notations**, lorsqu'aucune restriction à un référentiel n'est précisée, il s'agit d'une restriction au référentiel R , sinon * pour le référentiel R^* . De même, G réfère au **point coïncidant** de $G \in R^*$ sauf mention contraire.

5.2 Caractérisation de éléments cinétiques et théorèmes de Koenig

5.2.1 Impulsion

Définition 5.8. L'impulsion du point matériel A_i est

$$\vec{\mathbf{P}}(A_i) = m_i \vec{\mathbf{v}}(A_i)$$

Pour un système Σ ,

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{P}}(A_i)$$

et dans le cas où le système est une réunion de n sous-systèmes Σ_α , on a que

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{\mathbf{P}}_\alpha$$

Proposition 5.9. Impulsion du centre de masse

$$\vec{\mathbf{P}} = M \vec{\mathbf{v}}(G)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} M \vec{\mathbf{OG}} &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{OA}}_i \\ M \vec{\mathbf{v}}(G) &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{v}}(A_i) \end{aligned}$$

□

Proposition 5.10. Proposition fondamentale

$$\vec{\mathbf{P}}^* = \vec{\mathbf{0}}$$

Démonstration. $\sum_{i=1}^N m_i \vec{\mathbf{GA}}_i = \vec{\mathbf{0}}$ et on dérive par rapport au temps. □

Remarque 5.11. Il est possible d'exprimer l'impulsion en **fonction** de l'impulsion propre qui est l'impulsion dans R^* et de l'impulsion d'un point matériel fictif de masse M placé en G .

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{P}}^* + M \vec{\mathbf{v}}(G)$$

Dans le cas d'une description continue, ceci devient $\vec{\mathbf{P}} = \iiint_{\Sigma} \vec{\mathbf{v}}(A) \rho(A) dV$

5.2.2 Moment cinétique et premier théorème de Koenig

Définition 5.12. Le **moment cinétique** d'un point matériel A_i par rapport à un point C est

$$\vec{\sigma}_i(C) = \overrightarrow{CA_i} \times \vec{P}(A_i)$$

Pour un système Σ ,

$$\vec{\sigma}(C) = \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_i(C) = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{CA_i} \times \vec{P}(A_i)$$

Proposition 5.13. Le champ des moments cinétiques $\vec{\sigma}(C)$ d'un système Σ est un torseur.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(C) &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{CA_i} \times m_i \vec{v}(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'A_i} \right) \times m_i \vec{v}(A_i) \\ &= \vec{\sigma}(C') + \vec{P} \times \overrightarrow{C'C} \end{aligned}$$

□

La **résultante** du torseur est \vec{P} et $\vec{\mathcal{T}}_P = \left(\vec{P}, \vec{\sigma}(C) \right)$ est le **torseur cinétique** du solide.

Proposition 5.14. Le moment cinétique dans le référentiel R^* ne dépend pas de C dans la définition 5.12.

Démonstration. $\vec{P}^* = \vec{0}$ et le torseur cinétique dans R^* est donc un couple. On a que $\vec{\sigma}^*(C) = \vec{\sigma}^*(C') = \vec{\sigma}^*$. □

Proposition 5.15. Le moment cinétique propre qui est le moment cinétique dans R^* est le moment cinétique par rapport au centre de masse dans R .

$$\vec{\sigma}(G) = \vec{\sigma}^*$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(G) &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\mathbf{GA}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\mathbf{GA}}_i \times m_i (\vec{\mathbf{v}}^*(A_i) + \vec{\mathbf{v}}(G)) \\
&= \vec{\sigma}^*(G) + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\mathbf{GA}}_i \right)}_{=\vec{\mathbf{0}}} \vec{\mathbf{v}}(G) \\
&= \vec{\sigma}^*
\end{aligned}$$

□

Théorème 5.16. Premier théorème de Koenig

$$\vec{\sigma}(C) = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{\mathbf{CG}} \times M \vec{\mathbf{v}}(G)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(C) &= \vec{\sigma}(G) + \overrightarrow{\mathbf{P}} \times \overrightarrow{\mathbf{GC}} \\
&= \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{\mathbf{CG}} \times M \vec{\mathbf{v}}(G)
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.17. Le premier théorème de Koenig **exprime** le moment cinétique par rapport à un point **en fonction** du moment cinétique propre et du moment cinétique d'un point matériel fictif placé en G de masse M.

Remarque 5.18. Dans la description continue, le **moment cinétique** est alors

$$\vec{\sigma}(C) = \iiint_{\Sigma} \overrightarrow{\mathbf{CA}} \times \vec{\mathbf{v}}(A) \rho(A) dV + \iiint_{\sigma} d\sigma_{\alpha}^*$$

Définition 5.19. Soit $\Delta = (O, \hat{\mathbf{u}})$ un axe orienté. Le **moment cinétique** par rapport à Δ est

$$\sigma_{\Delta} = \vec{\sigma}(O) \cdot \hat{\mathbf{u}}$$

5.2.3 Énergie cinétique et second théorème de Koenig

Définition 5.20. L'énergie cinétique d'un point matériel A_i est

$$E_{c,i} = \frac{1}{2} m \vec{\mathbf{v}}_i^2$$

Théorème 5.21. Second théorème de Koenig

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M \vec{\mathbf{v}}(G)^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(A_i) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}^*(A_i) + \vec{v}(G))^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{v}^*(A_i)^2 + 2\vec{v}^*(A_i) \cdot \vec{v}(G) + \vec{v}(G)^2 \right) \\
&= E_c^* + \frac{1}{2} M \vec{v}(G)^2 + \underbrace{\vec{P}^*}_{=\vec{0}} \cdot \vec{v}(G)
\end{aligned}$$

□

Remarque 5.22. Dans la description continue, l'énergie cinétique est alors

$$E_c = \iiint_{\Sigma} \vec{v}(A)^2 \rho(A) dV + \iiint_{\Sigma} dE_c^*$$

Remarque 5.23. Le second théorème de Koenig **exprime** l'énergie cinétique par rapport à un point **en fonction** de l'énergie cinétique propre et de l'énergie cinétique d'un point matériel fictif placé en G de masse M .

5.2.4 Moment d'inertie

Définition 5.24. Le **moment d'inertie** de S par rapport à un point C est le tenseur

$$I_{ab}(C) = \sum_{i=1}^N m_i \left(\overrightarrow{CA}_i^2 \delta_{ab} - x_{i,a} x_{i,b} \right)$$

où $\overrightarrow{CA}_i = \sum_{j=1}^3 x_{i,j} \hat{x}_{i,j}$.

Théorème 5.25. Théorème de Steiner

$$I_{ab}(C) = I_{ab}(G) + M \left(\overrightarrow{CG}^2 \delta_{ab} - x_{G,a} x_{G,b} \right)$$

Remarque 5.26. Le théorème de Steiner **exprime** le moment d'inertie par rapport à un point **en fonction** du moment d'inertie propre et du moment d'inertie d'un point matériel fictif placé en G de masse M .

Supposons que $C \in S$. Alors I_{ab} est une constante qui caractérise le solide. On peut vérifier que I est un tenseur symétrique d'ordre deux. On a que $R \in SO(3)$, $I'(C) = R I(C) R^T$ avec $I'(C)$ diagonale. Pour tout point $C \in S$, il existe un système d'axes $(C, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ tel que les valeurs propres correspondantes soient les moments d'inertie par rapport aux axes principaux.

$$I'(C) = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) \quad (37)$$

Définition 5.27. Soit $\Delta = (C, \hat{u})$ un axe orienté. Le **moment d'inertie** par rapport à Δ est

$$I_{\Delta} = I_{ab}(C) u^a u^b$$

où $\hat{u} = u_i \hat{u}^i$.

Proposition 5.28. I_{Δ} ne dépend ni de la base utilisée ni du point C dans la définition 5.27.

Le moment d'inertie est donné par la définition 5.27.

$$\begin{aligned} I_{\Delta} &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\overrightarrow{\mathbf{CA}_i}^2 \delta_{ab} - x_{i,a} x_{i,b} \right) u^a u^b \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\overrightarrow{\mathbf{CA}_i}^2 - \left(\overrightarrow{\mathbf{CA}_i} \cdot \hat{u} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

car $\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\mathbf{CA}_i}^2 \delta_{ab} u^a u^b = \left(\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\mathbf{CA}_i}^2 \right) \hat{u}^2 = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\mathbf{CA}_i}^2$ vu que \hat{u} est unitaire. Ceci donne la formule du moment d'inertie par rapport à un axe Δ

$$I_{\Delta} = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\mathbf{H}_i \mathbf{A}_i}^2 \quad (38)$$

où \mathbf{H}_i est le projeté orthogonal sur l'axe Δ du point matériel A_i .

Dans le cas général avec $C \in S$ et $(C, \hat{u}_a) = \Delta_a$ où $(\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3)$ sont les axes principaux, les moments d'inertie par rapport aux axes principaux sont donnés par la définition 5.27.

$$I_{\Delta_a} = I_{cd}(C) u_a^c u_a^d = I_{aa}(C) = J_a \quad (39)$$

Théorème 5.29. Théorème de Huygens

Soit Δ_G un axe orienté contenant G et $\Delta_{//}$ un axe orienté parallèle à Δ_G ,

$$I_{\Delta_{//}} = I_{\Delta_G} + M d^2$$

où d est la distance entre ces axes.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème 5.25. \square

Définition 5.30. Un **axe de symétrie** Δ d'un système Σ est tel que si $(A_i, m_i) \in \Sigma$, alors $(A'_i, m_i) \in \Sigma$ où A'_i est le symétrique orthogonal de A_i par rapport à Δ .

Définition 5.31. Un **plan de symétrie** π d'un système Σ est tel que si $(A_i, m_i) \in \Sigma$, alors $(A'_i, m_i) \in \Sigma$ où A'_i est le symétrique perpendiculaire de A_i par rapport à Δ .

Proposition 5.32. Caractérisation des plans et axes de symétries

- (i) Si Δ est un axe de symétrie d'un système Σ , alors Δ est un axe principal d'inertie par rapport à chacun de ses points et $(G, \hat{\mathbf{u}}) \in \Delta$.
- (ii) Si $C \in \pi$ un plan de symétrie d'un système Σ , alors l'axe passant par C est perpendiculaire à π et est un axe principal d'inertie par rapport C .

Démonstration. (i) Prenons Δ selon $\hat{\mathbf{z}}$ et $(O, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ un repère orthonormé direct, alors

$$\begin{aligned} M\overrightarrow{\mathbf{OG}} &= \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\mathbf{OA}_i} \\ Mx_G &= \sum_{i=1}^N m_i x_{A_i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_i x_{A_i} + m_i x_{A'_i}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On effectue un raisonnement similaire pour y_G . Il suffit désormais de montrer que $I_{13} = I_{23} = 0$ car le tenseur d'inertie est symétrique.

$$\begin{aligned} I_{13} &= \sum_{i=1}^N m_i x_{A_i} z_{A_i} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_i x_{A_i} z_{A_i} + m_i x_{A'_i} z_{A'_i}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On procède de même pour I_{23} .

(ii) La preuve est laissée au lecteur. □

5.2.5 Calcul des éléments cinétique d'un solide

On considère désormais $C \in S$.

Le moment cinétique est donné par la définition 5.12. Par (32),

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma}(C) &= \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\mathbf{CA}_i} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}(C) + \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{\mathbf{CA}_i} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} \times \overrightarrow{\mathbf{CA}_i}) \\ &= M\overrightarrow{\mathbf{CG}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}(C) + \sum_{i=1}^N m_i \left(\overrightarrow{\mathbf{CA}_i}^2 \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}} - (\overrightarrow{\mathbf{CA}_i} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}}) \overrightarrow{\mathbf{CA}_i} \right) \\ \sigma_a(C) &= M \left(\overrightarrow{\mathbf{CG}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}(C) \right)_a + \sum_{i=1}^N m_i \left(\overrightarrow{\mathbf{CA}_i}^2 \Omega_a - x_{i,b} \Omega^b x_{i,a} \right) \end{aligned}$$

Le moment cinétique est alors

$$\sigma_a(C) = M \left(\overrightarrow{CG} \times \overrightarrow{v}(C) \right)_a + I_{ab}(C) \Omega^b \quad (40)$$

On déduit deux cas particuliers

$$\sigma_a^* = I_{ab}(G) \Omega^b \quad (41)$$

$$\sigma_a(C) = I_{ab}(C) \Omega^b \quad (42)$$

respectivement lorsque $C = G$ et lorsque C est fixe.

L'énergie cinétique est donnée par la définition 5.8. Par le théorème 5.21,

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{v}(A_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \overrightarrow{v}(G)^2 + E_c^* \end{aligned}$$

De plus par (32),

$$\begin{aligned} E_c^* &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\overrightarrow{v}(A_i)^*)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overrightarrow{v}(A_i)^* \cdot (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{GA}_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\Omega} \cdot (\overrightarrow{GA}_i \times \overrightarrow{v}(A_i)^*) \end{aligned}$$

L'énergie cinétique propre est alors

$$E_c^* = \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{\sigma}^* \quad (43)$$

$\overrightarrow{\Omega}$ et $\overrightarrow{\sigma}$ sont respectivement les résultantes du torseur cinématique et du torseur cinétique. L'énergie cinétique est alors

$$E_c = \mathcal{C}(\overrightarrow{\mathcal{T}}_C, \overrightarrow{\mathcal{T}}_P) \quad (44)$$

On déduit un cas particulier où chaque point du solide S est en rotation autour de $\Delta = (O, \hat{z})$ où $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta} \hat{z}$ avec θ entre Δ et S . Si Δ est un axe principal d'inertie, alors

$$\overrightarrow{\sigma}(O) = I_\Delta \overrightarrow{\Omega}$$

Le moment cinétique par rapport à Δ est alors

$$\sigma_\Delta = I_\Delta \Omega \quad (45)$$

L'énergie cinétique est alors

$$E_c = \frac{1}{2} I_\Delta \Omega^2 \quad (46)$$

6 Dynamique

6.1 Généralités sur les forces

6.1.1 Torseur de force et travail

Définition 6.1. Soit Σ un système de points matériels A_i de masses inertielles m_i . Les **forces intérieures** sont dues aux autres points matériels de Σ

$$\vec{\mathbf{f}}_{\text{int},i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{f}}_{j \rightarrow i}$$

avec $\vec{\mathbf{f}}_{j \rightarrow i} = f_{ij}(r_{ij}) \hat{\mathbf{u}}_{ij}$, $r_{ij} = \|\overrightarrow{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j}\|$, $\hat{\mathbf{u}}_{ij} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j}}{r_{ij}}$ et $f_{ij}(r_{ij}) = f_{ji}(r_{ij})$. Les **forces extérieures** $\vec{\mathbf{f}}_{\text{ext},i}$ sont créées par des particules qui ne sont pas incluses dans Σ .

Pour un système Σ ,

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{int}} + \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$$

où $\vec{\mathbf{F}}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{f}}_{\text{int},i}$ et $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{f}}_{\text{ext},i}$.

Définition 6.2. Le **moment** de $\vec{\mathbf{f}}_i$ par rapport à un point C est

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{\mathbf{f}}_i}(C) = \overrightarrow{\mathbf{C} \mathbf{A}_i} \times \vec{\mathbf{f}}_i$$

où $\vec{\mathbf{f}}_i = \vec{\mathbf{f}}_{\text{int},i} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ext},i}$. Le **moment de force total** est

$$\vec{\mathcal{M}}(C) = \vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} + \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$$

où $\vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\mathbf{C} \mathbf{A}_i} \times \vec{\mathbf{f}}_{\text{int},i}$ et $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\mathbf{C} \mathbf{A}_i} \times \vec{\mathbf{f}}_{\text{ext},i}$.

Proposition 6.3. Le champ des moments de force $\vec{\mathcal{M}}(C)$ d'un système Σ est un torseur.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}(C) &= \sum_{i=1}^N \left(\overrightarrow{\mathbf{C} \mathbf{C}'} + \overrightarrow{\mathbf{C}' \mathbf{A}_i} \right) \times \vec{\mathbf{f}}_i \\ &= \vec{\mathcal{M}}(C') + \vec{\mathbf{F}} \times \overrightarrow{\mathbf{C}' \mathbf{C}} \end{aligned}$$

□

La **résultante** du torseur est $\vec{\mathbf{F}}$ et $\vec{\mathcal{T}}_F = \left(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathcal{M}}(C) \right)$ est le **torseur dynamique** du solide.

Remarque 6.4. (i) Si Σ n'est composé que d'un seul point matériel A , $\vec{\mathcal{M}}(A) = \vec{\mathbf{0}}$ et $\vec{\mathcal{T}}_F$ est un **glisseur**. Cela traduit l'idée d'une force qui s'applique en un point.

- (ii) Si Σ est composé de plusieurs points matériels A_i , $\vec{\mathcal{T}}_F$ n'est pas de manière générale un glisseur et on ne peut pas considérer en général que la force totale s'exerce en un point.
- (iii) Si $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathcal{T}}_F$ est un **couple** et $\vec{\mathcal{M}}(C)$ ne dépend pas de C dans la définition 6.2.
- (iv) On a une notion de **moment** par rapport à un axe $\Delta = (O, \hat{u})$, $\vec{\mathcal{M}}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}(O) \cdot \hat{u}$.

Définition 6.5. Le **travail** de $\vec{\mathbf{f}}$ entre $A(t_1) = P$ et $A(t_2) = Q$ le long de γ orientée de P à Q est la circulation de $\vec{\mathbf{f}}$ le long de γ .

$$W_{P \rightarrow Q} = \int_{\gamma} \vec{\mathbf{f}} \cdot d\vec{\mathbf{OM}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathbf{f}} \cdot \vec{\mathbf{v}} dt$$

Remarque 6.6. Si $\vec{\mathbf{f}} = -\vec{\text{grad}} E_p$ où E_p est l'énergie potentielle, alors

$$W_{P \rightarrow Q} = -\Delta E_P$$

Remarque 6.7. Pour un système Σ , le **travail** est

$$W_{P \rightarrow Q} = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma} \vec{\mathbf{f}}_i \cdot d\vec{\mathbf{OM}}$$

Proposition 6.8. Propriétés fondamentales

- (i) $\vec{\mathcal{T}}_{F_{\text{int}}} = (\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{0}})$
- (ii) $W_{\text{int}} = -\Delta E_{P,\text{int}}$ où $E_{P,\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N e_{p,\text{int},ij}$ est l'énergie potentielle intérieure et $\dot{e}_{p,\text{int},ij} = -f_{ij}(r_{ij}) \dot{r}_{ij}$. En particulier $W_{\text{int}} = 0$ pour un solide car r_{ij} est constant.

Démonstration. (i)

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{f}}_{\text{int},i} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{\mathbf{f}}_{j \rightarrow i} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\vec{\mathbf{f}}_{j \rightarrow i} + \vec{\mathbf{f}}_{i \rightarrow j}) \\ &= \vec{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}}_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{\mathbf{CA}}_i \times \vec{\mathbf{f}}_{\text{int},i} \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \overrightarrow{\mathbf{CA}}_i \times \vec{\mathbf{f}}_{j \rightarrow i} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \left(\overrightarrow{\mathbf{CA}}_i \times \vec{\mathbf{f}}_{j \rightarrow i} + \overrightarrow{\mathbf{CA}}_j \times \vec{\mathbf{f}}_{i \rightarrow j} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \overrightarrow{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j} \times \vec{\mathbf{f}}_{i \rightarrow j} \\
&= \vec{\mathbf{0}}
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
W_{\text{int}} &= \sum_{i=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \vec{\mathbf{f}}_{\text{int},i} \cdot \vec{\nabla}(\mathbf{A}_i) dt \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{t_0}^{t_1} \vec{\mathbf{f}}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{\nabla}(\mathbf{A}_i) dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{t_0}^{t_1} \left(\vec{\mathbf{f}}_{j \rightarrow i} \cdot \vec{\nabla}(\mathbf{A}_i) + \vec{\mathbf{f}}_{i \rightarrow j} \cdot \vec{\nabla}(\mathbf{A}_j) \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{t_0}^{t_1} f_{ij}(r_{ij}) \hat{\mathbf{u}}_{ij} \cdot \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_j} dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{t_0}^{t_1} \dot{e}_{p,\text{int},ij} dt
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $r_{ij}^2 = \|\overrightarrow{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j}\|^2$ et en dérivant, $\dot{r}_{ij} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_j} \cdot \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_j}}{r_{ij}} = \hat{\mathbf{u}}_{ij} \cdot \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}_i \mathbf{A}_j}$ pour passer de l'avant-dernière ligne à la dernière ligne. \square

Proposition 6.9. Travail des forces s'exerçant sur un solide

$$W = W_{\text{ext}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_i \cdot \vec{v}(A_i) dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_i \cdot \left(\vec{v}(C) + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{CA_i} \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \vec{v}(C) + \sum_{i=1}^N \vec{\Omega} \cdot \left(\overrightarrow{CA_i} \times \vec{f}_i \right) \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{F} \cdot \vec{v}(C) + \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{M}}(C) \right) dt \\
&= 2 \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{C} \left(\vec{\mathcal{T}}_C, \vec{\mathcal{T}}_F \right) dt \\
&= 2 \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{C} \left(\vec{\mathcal{T}}_C, \vec{\mathcal{T}}_{F_{\text{ext}}} \right) dt \\
&= W_{\text{ext}}
\end{aligned}$$

□

6.1.2 Force gravitationnelle

Pour un solide S ,

$$f_{ij}(r) = -G \frac{m_{g,i} m_{g,j}}{r_{ij}^2} \quad (47)$$

$$e_{p,\text{int},ij} = -G \frac{m_{g,i} m_{g,j}}{r_{ij}} \quad (48)$$

$$E_{p,\text{int}} = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} -G \frac{m_{g,i} m_{g,j}}{r_{ij}} \quad (49)$$

Remarque 6.10. Le champ \vec{g} est **uniforme** avec une **bonne approximation** à la surface de la Terre lorsque l'on regarde une région de taille $R \ll R_{\oplus}$.

Le poids est donné par la définition 6.1

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_{g,i} \vec{g}(A_i) = M_G \vec{g} \quad (50)$$

où M_g est la masse totale gravitationnelle.

Le moment du poids est donné par la définition 6.2

$$\vec{\mathcal{M}}_p(C) = \sum_{i=1}^N m_{g,i} \overrightarrow{CA_i} \times \vec{g}(A_i) = \overrightarrow{CG_g} \times \vec{g} \quad (51)$$

où G_g est la position du centre de gravité.

Le **torseur du poids** est donc un **glisseur** et tout se passe comme si le poids était appliqué en G_g .

Le travail du poids est donné par la définition 6.5 et la remarque 6.6.

$$\begin{aligned} W(P) &= \int_{t_1}^{t_2} M_g \vec{v}(G_g) \cdot \vec{g} dt \\ &= -\Delta E_p \end{aligned}$$

En prenant $\vec{g} = -g\hat{z}$, l'énergie potentielle est alors

$$E_p = M_g g z(G_g) \quad (52)$$

6.1.3 Force de réaction et condition de roulement sans glissement

On considère deux solides S et S' en contact.

Définition 6.11. La force de **réaction** de S' sur S se décompose en une force de **frottement** \vec{T} et une force **normale** \vec{N}

Remarque 6.12. La force de frottement a tendance à s'**opposer** au mouvement. La loi empirique de Coulomb du frottement dépend du cas statique ou dynamique.

- (i) S est immobile par rapport à S' . Une force \vec{F} est appliquée à S et $\|\vec{T}_s\| \leq f_s \|\vec{N}\|$ où $f_s > 0$ est le coefficient de frottement statique.
- (ii) S est en mouvement par rapport à S' . Une force \vec{F} est appliquée à S et $\|\vec{T}_d\| = f_d \|\vec{N}\|$ où $f_d > 0$ est le coefficient de frottement dynamique.

Le roulement sans glissement n'est possible que si l'on a des forces de frottement dynamique. La condition de roulement sans glissement est

$$\vec{v}(A) = \vec{0} \quad (53)$$

où A le point du solide en contact avec le support.

6.2 Théorèmes de la dynamique du solide et applications

6.2.1 Loi fondamentale et caractérisation des référentiels

Loi 6.13. Loi fondamentale

Pour un point matériel A_i de masse inertielle m_i ,

$$m_i \vec{a} = \vec{F}$$

Remarque 6.14. La loi 6.13 est **valable** dans les **référentiels inertiels**.

En effet, supposons que la loi soit exacte dans R . L'accélération dans R' est donnée par (35).

$$\vec{\mathbf{a}}_R(A) = \vec{\mathbf{a}}_r(A) + \vec{\mathbf{a}}_e(A) + \vec{\mathbf{a}}_c(A)$$

Ceci revient à l'équivalence suivante,

$$m_i \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{F}} \iff m_i \vec{\mathbf{a}}_{R'} = \vec{\mathbf{F}} + \vec{\mathbf{F}}_e + \vec{\mathbf{F}}_c$$

où $\vec{\mathbf{F}}_e = -m_i \vec{\mathbf{a}}_e$ et $\vec{\mathbf{F}}_c = -m_i \vec{\mathbf{a}}_c$ sont respectivement la **force d'inertie d'entraînement** et la **force de Coriolis**.

Alors R' est inertiel ssi R' est en translation uniforme par rapport à R (i.e. $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{R'/R} = \vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{a}}_R(O' \in R') = \vec{\mathbf{0}}$).

Définition 6.15. Un **référentiel inertiel** est un référentiel pour lequel le mouvement d'un point matériel qui n'est soumis à aucune force est rectiligne uniforme.

Remarque 6.16. Le **meilleur** référentiel inertiel connu est celui centré sur le centre de notre galaxie et pointant vers des galaxies lointaines.

6.2.2 Théorème de l'impulsion

Théorème 6.17. Théorème de l'impulsion

$$\dot{\vec{\mathbf{P}}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \iff M \vec{\mathbf{a}}(G) = \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$$

Remarque 6.18. Le mouvement de G se **détermine** donc comme si G était un point matériel de masse M sur lequel agit $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$.

6.2.3 Théorème du moment cinétique

Théorème 6.19. Théorème du moment cinétique

$$\dot{\vec{\sigma}}(C) = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(C) - M \vec{\mathbf{v}}(C) \times \vec{\mathbf{v}}(G)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\sigma}}(C) &= \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{A}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}(A_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \dot{\vec{\mathbf{C}}}\vec{\mathbf{A}}_i \times m_i \vec{\mathbf{v}}(A_i) + \sum_{i=1}^N \vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{A}}_i \times \dot{\vec{\mathbf{v}}}_i \\ &= \underbrace{\vec{\mathcal{M}}(C)}_{=\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(C)} - \vec{\mathbf{v}}(C) \times \underbrace{\vec{\mathbf{P}}}_{=M\vec{\mathbf{v}}(G)} \end{aligned}$$

□

On en déduit deux cas particuliers

$$\dot{\vec{\sigma}}^* = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(\text{G}) \quad (54)$$

$$\dot{\vec{\sigma}}(\text{C}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(\text{C}) \quad (55)$$

respectivement lorsque $\text{C} = \text{G}$ et lorsque C est fixe.

Remarque 6.20. Les théorèmes 6.17 et 6.19 donnent 6 équations pour $3N$ inconnues ce qui est **insuffisant**. Cependant, dans deux cas intéressants, ces théorèmes permettent de **déterminer** le mouvement.

- (i) Le problème à deux corps ($N = 2$)
- (ii) Le solide dont le mouvement est caractérisé par 6 paramètres. Ces paramètres peuvent être la position de G et les angles d'Euler dans R^* .

Application 6.21. Tourniquet qui éjecte de l'eau

On éjecte de l'eau afin de faire tourner le tourniquet. Le système Σ est composé de l'eau dans les bras et dans la colonne centrale ainsi que les bras eux-mêmes. On suppose la vitesse d'éjection de l'eau $u > 0$.

Par (45),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\hat{z} \cdot \vec{\sigma}(\text{O})) &= \hat{z} \cdot \dot{\vec{\sigma}}(\text{O}) \\ &= \dot{\sigma}(\text{O}) \end{aligned}$$

car $\Delta = (O, \hat{z})$ est un axe principal d'inertie. Le moment cinétique en O a une composante uniquement selon \hat{z} .

À l'instant t , le moment cinétique en O de Σ est la somme du moment cinétique du tourniquet par rapport à O , soit $\sigma_{\Delta}(t) = I_{\Delta}\Omega(t)$, et du moment cinétique de la masse d'eau Ddt qui entre dans la colonne centrale, soit $d\sigma_e$.

$$\begin{aligned} d\sigma_e &= \hat{z} \cdot d\vec{\sigma}_e \\ &= \hat{z} \cdot (\overrightarrow{\text{OC}} \times dm \vec{v}_e) \\ &= 0 \end{aligned}$$

À l'instant $t + dt$, le moment cinétique en O de Σ est la somme du moment cinétique du tourniquet par rapport à O , soit $\sigma_{\Delta}(t + dt) = I_{\Delta}\Omega(t + dt)$, des moments cinétiques des masses d'eau $\frac{1}{4}Ddt$ qui sortent des quatre bras du tourniquet, soit $d\sigma_{e,1}, \dots, d\sigma_{e,4}$ et du moment cinétique de la masse d'eau Ddt qui entre dans la colonne centrale, soit $d\sigma_{e,0} = 0$.

$$\begin{aligned} d\sigma_{e,1} &= \hat{z} \cdot d\vec{\sigma}_{e,1} \\ &= \hat{z} \cdot (L\hat{\rho} \times dm(L\Omega - u)\hat{\theta}) \\ &= \frac{D}{4}L(L\Omega - u)dt \end{aligned}$$

Les calculs pour $d\sigma_{e,2}, \dots, d\sigma_{e,4}$ donnent le même résultat et $d\sigma_e = DL(L\Omega - u) dt$.

Au final,

$$\begin{aligned}\sigma_O(t) &= I_\Delta \Omega(t) \\ \sigma_O(t + dt) &= I_\Delta \Omega(t + dt) + DL(L\Omega - u) dt\end{aligned}$$

O étant un point fixe, par (55),

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\sigma}}(O) &= \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O) \\ &= \vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}}(O)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\dot{\sigma}(O) = 0$$

car $\hat{z} \cdot \vec{\mathcal{M}}_{\vec{P}}(O) = 0$.

Le moment cinétique en O est donc conservé.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (I_\Delta \Omega(t + dt) - I_\Delta \Omega(t) + DL(L\Omega - u) dt) &= 0 \\ I_\Delta \dot{\Omega} + DL(L\Omega - u) &= 0\end{aligned}$$

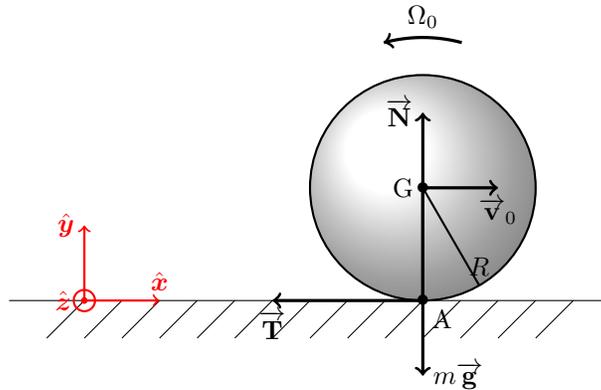
En supposant u constant, la solution de cette équation différentielle du premier ordre est

$$\Omega(t) = \frac{u}{L} \left(1 - e^{-\frac{L^2 D}{I_\Delta} t} \right)$$

où $\Omega_0 = 0$ est la condition initiale.

Application 6.22. Mouvement rétro

Un disque plein homogène glisse sur le sol. Le système Σ est composé du disque et du sol. On suppose la vitesse initiale $v_0 > 0$ et la vitesse angulaire initiale Ω_0 dont le sens est contraire au mouvement.



Par le théorème 6.17,

$$m \vec{\mathbf{a}}(G) = m \vec{\mathbf{g}} + \vec{\mathbf{N}} + \vec{\mathbf{T}}$$

où $\vec{\mathbf{N}}$ et $\vec{\mathbf{T}}$ sont respectivement les composante normales et tangentielles de la force de réaction.

La hauteur du disque étant constante, la résultante des forces selon $\hat{\mathbf{y}}$ est nulle et $N = mg$. Par la remarque 6.12,

$$\vec{\mathbf{T}} = -f_d mg \hat{\mathbf{x}}$$

où f_d est le coefficient de frottement dynamique du disque sur le sol.

Par (45),

$$\dot{\vec{\sigma}}^* = I_\Delta \dot{\Omega}$$

car $\Delta = (G, \hat{\mathbf{z}})$ est un axe principal d'inertie. Le moment cinétique en G a une composante uniquement selon $\hat{\mathbf{z}}$.

Par (54),

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \hat{\mathbf{z}} \cdot \vec{\sigma}^* \\ &= \hat{\mathbf{z}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{GA}} \times \vec{\mathbf{N}} + \overrightarrow{\mathbf{GA}} \times \vec{\mathbf{T}} \right) \\ &= -R f_d mg \end{aligned}$$

Pour un disque plein homogène, $I_\Delta = \frac{1}{2} m R^2$. Au final,

$$\Omega(t) = \frac{-2 f_d g}{R}$$

Par (32) et (53),

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(A) &= \vec{\mathbf{v}}(G) + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{\mathbf{GA}} \\ &= (\dot{x}_G(t) + R\Omega(t)) \hat{\mathbf{x}} \\ &= \vec{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

Pour $t' = \frac{v_0 + R\Omega_0}{3f_d g}$, la vitesse en A s'annule et le glissement cesse. Pour un tel temps, $\Omega(t') = \frac{1}{3}\Omega_0 - \frac{2}{3}v_0$ et $\dot{x}_G(t') = -R\Omega(t')$. Si $\dot{x}_G(t') < 0$, $\Omega_0 > \frac{2v_0}{R}$ et le cylindre se déplace vers la gauche en roulant sans glisser pour $t > t'$.

6.2.4 Théorème de l'énergie cinétique

Théorème 6.23. Théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta U = W_{\text{ext}}$$

où $U = E_c + E_p$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_c &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(A_i)^2 \right) \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}(A_i) \cdot \vec{a}(A_i) \\
 &= \sum_{i=1}^N \vec{v}(A_i) \cdot \vec{f}_i
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ext}} &= W - W_{\text{int}} \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(A_i) \cdot \vec{f}_i dt + \Delta E_p \\
 &= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \dot{E}_c dt}_{=\Delta E_c} + \Delta E_p
 \end{aligned}$$

□

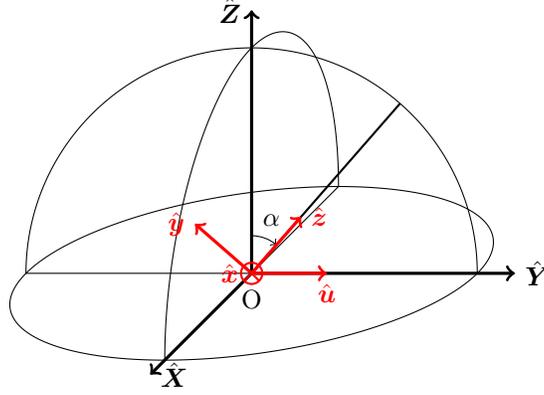
Remarque 6.24. Le théorème 6.23 est **utile** pour les problèmes à un degré de liberté comme un solide en rotation autour d'un axe fixe. L'équation obtenue n'est pas indépendante de celles obtenues par les théorèmes 6.17 et 6.19. L'énergie cinétique ne fait intervenir que des **dérivées premières** et dès lors le théorème 6.23 donne une **version intégrée** d'une certaine combinaison des équations venant des théorèmes 6.17 et 6.19. Cette combinaison est l'**intégrale première du mouvement**.

6.2.5 Pendule de Foucault et expérience d'Eötvös

Application 6.25. Pendule de Foucault

La période d'un pendule simple de longueur L est $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Quelles sont les modifications lorsque l'on tient compte de la rotation de la Terre ?

On introduit un référentiel $R' = (O' = O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ orthonormé direct avec \hat{x} et \hat{y} pointant respectivement vers l'est et vers le nord.



La Terre tourne avec une vitesse angulaire $\Omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{T_{\oplus}}$. Par la remarque 6.14,

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

L'expression de ces forces supplémentaires est alors

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= mR_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \sin \alpha \hat{u} \\ \vec{F}_c &= -2m\vec{\Omega}_{\oplus} \times \vec{v}\end{aligned}$$

où $\hat{u} = \sin \alpha \hat{z} - \cos \alpha \hat{y}$, $\vec{\Omega}_{\oplus} = \Omega_{\oplus} (\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \hat{y})$ et $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$. La force d'inertie d'entraînement agit uniquement selon le vecteur \hat{u} analogue au vecteur $\hat{\rho}$ des coordonnées cylindriques. En effet, $\vec{a}_R (O' \in R') = \vec{0}$ car les origines coïncident et $\vec{\Omega}_{R'/R} \times \vec{O'M} = \vec{0}$ car $\vec{\Omega}_{R'/R}$ est constant.

En projetant sur les axes,

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -\frac{T_x}{L} + \underbrace{2m\Omega_{\oplus} \cos \alpha \dot{y} - 2m\Omega_{\oplus} \sin \alpha \dot{z}}_{=F_{c,x}} \\ m\ddot{y} &= -\frac{T_y}{L} - \underbrace{mR_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \sin \alpha \cos \alpha}_{=F_{e,y}} - \underbrace{2m\Omega_{\oplus} \cos \alpha \dot{x}}_{=F_{c,y}} \\ m\ddot{z} &= -mg + \frac{T_h}{L} + \underbrace{mR_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \sin^2 \alpha}_{=F_{e,z}} + \underbrace{2m\Omega_{\oplus} \sin \alpha \dot{x}}_{=F_{c,z}} \end{cases}$$

où $h = z - R_{\oplus}$ est la hauteur du pendule.

La vitesse et l'accélération selon \hat{z} sont quasi-nulles. De plus, pour de petites oscillations, $\frac{h}{L}$ est proche de 1.

La dernière équation permet alors d'isoler $T \simeq mg - mR_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \sin^2 \alpha - 2m\Omega_{\oplus} \sin \alpha \dot{x}$ et le système se réécrit

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -\frac{mgx}{L} + \frac{mR_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \sin \alpha}{L}x + 2m\Omega_{\oplus} \cos \alpha \dot{y} \\ m\ddot{y} &= -\frac{mgy}{L} + \frac{mR_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \sin \alpha}{L}y - mR_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2m\Omega_{\oplus} \cos \alpha \dot{x} \end{cases}$$

où les termes en $x\dot{x}$ et $y\dot{y}$ sont négligeables pour de petites oscillations.

Au final,

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{x}} + (\tilde{g}/L)\tilde{x} &= 2\tilde{\Omega}_{\oplus}\dot{\tilde{y}} \\ \ddot{\tilde{y}} + (\tilde{g}/L)\tilde{y} &= -2\tilde{\Omega}_{\oplus}\dot{\tilde{x}} \end{cases}$$

où $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y + \frac{R_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 L}{g} \sin \alpha \cos \alpha$, $\tilde{g} = g - R_{\oplus}\Omega_{\oplus}^2 \sin^2 \alpha$ et $\tilde{\Omega} = \Omega \cos \alpha$. La force d'inertie d'entraînement modifie donc la direction de la verticale et définit la nouvelle accélération de pesanteur $\vec{\tilde{g}} = \vec{g} - \vec{a}_e$.

En introduisant un nouveau repère (O, x', y') faisant un angle $\tilde{\Omega}t$ avec (O, x, y) , on peut repérer un point $A = \tilde{x} + i\tilde{y}$ par $B = x' + iy' = e^{i\tilde{\Omega}t}A$. Une combinaison linéaire de ces deux équations donne

$$\ddot{A} + (\tilde{g}/L)A = -2i\tilde{\Omega}\dot{A}$$

En développant, $\dot{A} = -i\tilde{\Omega}e^{-i\tilde{\Omega}t}B + e^{-i\tilde{\Omega}t}\dot{B}$, $\ddot{A} = -\tilde{\Omega}^2 e^{-i\tilde{\Omega}t}B - 2i\tilde{\Omega}e^{-i\tilde{\Omega}t}\dot{B} + e^{-i\tilde{\Omega}t}\ddot{B}$ et mène à l'équation

$$\ddot{B} + \tilde{\omega}^2 B = 0$$

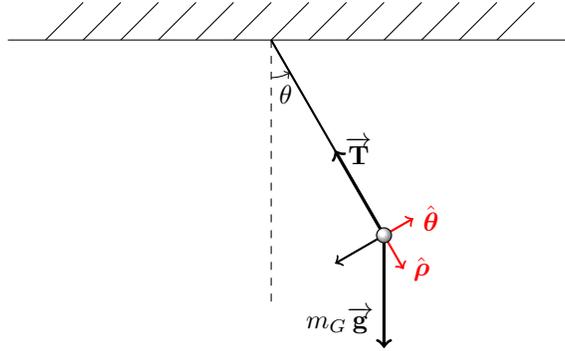
où $\tilde{\omega} = \sqrt{(\tilde{g}/L + \tilde{\Omega})}$.

Le pendule oscille dans un plan fixe par rapport au repère (O, x', y') à la pulsation $\tilde{\omega}$. Ce repère tourne avec une vitesse angulaire $-\tilde{\Omega}$ dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport au repère (O, x, y) dans l'hémisphère nord et dans le sens contraire des aiguilles d'une montre dans l'hémisphère sud.

À Paris, $\tilde{T} = 16.435$ s contre $T = 16.420$ s, $\frac{2\pi}{\tilde{\Omega}} = 31$ h 43' contre $\frac{2\pi}{\Omega} = 23$ h 56' et $y - \tilde{y} = -11.46$ cm où $\alpha_{\text{Paris}} = 41.135^\circ$, $g = 9.807$ ms⁻², $R_{\oplus} = 6.371 \times 10^6$ m, $\Omega = \frac{2\pi}{T_{\oplus}} = 7.292 \times 10^{-5}$ s⁻¹ et $L = 67$ m.

Expérience 6.26. Expérience d'Eötvös

Il s'agit de distinguer masse gravitationnelle et masse inertielle. La différence entre masse inertielle m_I et masse gravitationnelle m_G a des conséquences sur la pulsation d'un pendule simple.



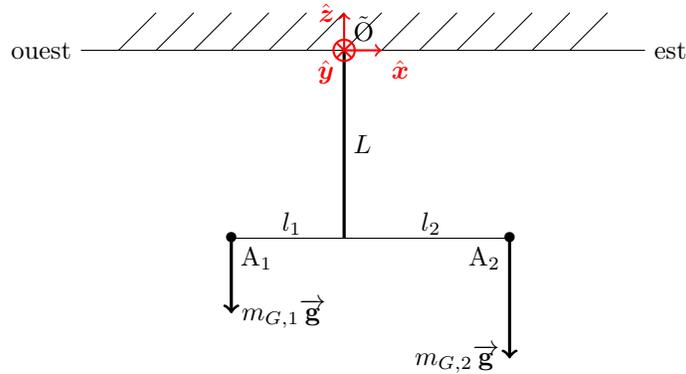
Par la loi 6.13,

$$m_I L \ddot{\theta} = -m_G g \sin \theta$$

Pour de petites oscillations, la période $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_I L}{m_G g}}$ dépend du rapport entre masse inertielle et masse gravitationnelle.

Pour mieux mesurer ce rapport, Eötvös se rend compte que la verticale doit dépendre du corps considéré. En effet, si $m_T \neq m_G$, alors $m_I \vec{a} = \vec{F} - m_I \vec{a}_e - m_I \vec{a}_c = \vec{f} + m_G \vec{g} - m_I \vec{a}_c$ où $\vec{g} = \vec{g} - \frac{m_I}{m_G} \vec{a}_e$ définit la verticale en fonction du corps.

On introduit le même référentiel $R' = (O' = O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ que dans le pendule de Foucault. On rappelle la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e = -m R_{\oplus} \Omega_{\oplus}^2 \sin \alpha \hat{u}$ où $\hat{u} = \sin \alpha \hat{z} - \cos \alpha \hat{y}$. On néglige la force de Coriolis dans cette expérience.



En appliquant la condition d'équilibre (i.e. $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$) au point d'attache \tilde{O} , on déduit que $l_1 m_{G,1} = l_2 m_{G,2}$ qui est la condition bien connue d'équilibre des leviers pour le poids et que $R_{\oplus} \Omega_{\oplus}^2 l_1 m_{I,1} \sin \alpha \cos \alpha - R_{\oplus} \Omega_{\oplus}^2 l_2 m_{I,2} \sin \alpha \cos \alpha + C = 0$ respectivement des composantes \hat{y} et \hat{z} où C est le couple exercé par le fil.

Au final,

$$C = R_{\oplus} \Omega_{\oplus}^2 \sin \alpha \cos \alpha l_1 m_{G,1} \left(\frac{m_{I,2}}{m_{G,2}} - \frac{m_{I,1}}{m_{G,1}} \right)$$

Le couple exercé par le fil est donc proportionnel à la différence de rapport de masse. En 1909, Eötvös obtient une très bonne précision $\left(\left| \frac{m_I}{m_G} - 1 \right| \leq 10^{-8} \right)$.

Remarque 6.27. L'égalité entre masse inertielle et gravitationnelle est restée mystérieuse jusqu'en 1915 où Einstein postula le **principe d'équivalence** qui stipule qu'il est **impossible** de **distinguer** les forces d'inerties et de gravitation. Si $m_I = m_G$, alors $m \vec{a} = \vec{f} + m (\vec{g} - \vec{a}_e - \vec{a}_c) = \vec{f} + m \vec{g}'$ où $\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_e - \vec{a}_c$ et le champ de gravitation est une nouvelle force d'inertie.

6.2.6 Lois de Kepler et le problème à deux corps

Loi 6.28. Lois de Kepler

- (i) Les planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est occupé par le soleil.
- (ii) L'aire balayée par le vecteur position $\overrightarrow{\mathbf{FA}}$ par unité de temps est une constante.
- (iii) a^3/T^2 est une constante qui est la même pour toutes les planètes où a est le demi-grand axe de l'ellipse et T la période de révolution de la planète.

Remarque 6.29. Newton démontre dans son célèbre ouvrage **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica** les lois de Kepler à l'aide du calcul différentiel et intégral. La démonstration des lois de Kepler est à l'origine du développement de ces outils mathématiques.

On s'intéresse au **problème à deux corps** dans lequel deux points matériels m_1 et m_2 interagissent sous l'action d'une force $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1} (r_{12}) \hat{u}$ où $r_{12} = \|\overrightarrow{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2}\|$ et $\hat{u} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2}}{\|\overrightarrow{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2}\|}$.

On s'intéresse aux éléments cinétiques du système Σ composé des deux corps. Le centre de masse du système est donné par la définition 5.4

$$\overrightarrow{\mathbf{OG}} = \frac{m_1 \overrightarrow{\mathbf{OA}_1} + m_2 \overrightarrow{\mathbf{OA}_2}}{m}$$

où $m = m_1 + m_2$. En particulier $\overrightarrow{\mathbf{A}_1 \mathbf{G}} = \frac{m_2}{m} \overrightarrow{\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2}$ et $\overrightarrow{\mathbf{A}_2 \mathbf{G}} = \frac{m_1}{m} \overrightarrow{\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1}$.

Par la proposition 5.10,

$$m_1 \vec{v}_1^* = -m_2 \vec{v}_2^*$$

car $\vec{P}^* = \vec{0}$.

Par la proposition 5.15,

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}(G) &= \vec{\sigma}^* \\
&= \overrightarrow{\mathbf{GA}_1} \times m_1 \vec{\mathbf{v}}_1^* + \overrightarrow{\mathbf{GA}_2} \times m_2 \vec{\mathbf{v}}_2^* \\
&= (\overrightarrow{\mathbf{GA}_2} - \overrightarrow{\mathbf{GA}_1}) \times m_2 \vec{\mathbf{v}}_2^* \\
&= \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} \times \frac{m_1 m_2}{m} \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}
\end{aligned}$$

Cette égalité s'écrit généralement,

$$\vec{\sigma}^* = \mu \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} \times \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} \quad (56)$$

où $\mu = \frac{m_1 m_2}{m}$ est la masse réduite.

Remarque 6.30. (56) est en fait plus générale si l'on considère le moment cinétique par rapport à A_1 d'un système Σ composé de deux corps où A_1 est fixé et A_2 de masse μ en mouvement.

$$\begin{cases} m_1 \overrightarrow{\mathbf{OA}_1} = \vec{\mathbf{f}}_{2 \rightarrow 1} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ext},1} \\ m_2 \overrightarrow{\mathbf{OA}_2} = \vec{\mathbf{f}}_{1 \rightarrow 2} + \vec{\mathbf{f}}_{\text{ext},2} \end{cases}$$

Les forces extérieures sont supposées nulles et une combinaison linéaire de ces deux équations donne $m_1 m_2 \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} = (m_1 + m_2) \vec{\mathbf{f}}_{1 \rightarrow 2}$. Au final, $\mu \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} = \vec{\mathbf{f}}_{1 \rightarrow 2}$ qui correspond à (56). Ceci est la **réduction** du problème à deux corps.

Remarque 6.31. Pour étudier le mouvement d'un système Σ de deux points matériels en interaction sans force extérieure au système, on considère que

- (i) Le mouvement de G est rectiligne uniforme.
- (ii) Le mouvement relatif de $\overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2}(t)$ est obtenu en considérant que A_1 est fixe et A_2 de masse μ .

Remarque 6.32. Si $m_2 \gg m_1$, alors $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \simeq m_1$.

On considère désormais les hypothèses (i) et (ii) de la remarque 6.31 où $A_1 = F$ et $A_2 = A$. $\vec{\mathbf{f}}$ est dirigée vers F fixe et $\vec{\mathbf{f}}$ est donc centrale.

Par (56),

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{\sigma}}^* &= \mu \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} \times \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} \\
&= \overrightarrow{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} \times \vec{\mathbf{f}}_{1 \rightarrow 2} \\
&= \vec{\mathbf{0}}
\end{aligned}$$

et le moment cinétique est conservé.

Dans la réduction du problème à deux corps, F est fixe et par (55),

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}(\text{F}) &= \vec{\mathcal{M}}(\text{F}) \\ &= \vec{\text{FA}} \times \vec{\mathbf{f}} \\ &= \vec{\mathbf{0}}\end{aligned}$$

car $\vec{\mathbf{f}}$ est centrale.

Le moment cinétique est donné par la définition 5.12

$$\vec{\sigma} = \vec{\text{FA}} \times \mu \vec{\mathbf{v}}(\text{A})$$

où $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(\text{F})$. On a donc que $\vec{\sigma} \cdot \vec{\text{FA}} = 0$ et A est dans le plan perpendiculaire à $\vec{\sigma}$ contenant F.

Dans ce plan, $\vec{\sigma} = \sigma \hat{\mathbf{z}}$ où $\sigma > 0$. Par (5), $\vec{\sigma} = \mu \rho \hat{\boldsymbol{\rho}} \times \rho \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$ et donc

$$\sigma = \mu \rho^2 \dot{\theta} \quad (57)$$

On considère le vecteur position $\vec{\text{FA}}$ et le déplacement infinitésimal $d\vec{\text{FA}}$. La trajectoire évolue de A(t) à A(t + dt) et on considère la surface infinitésimale $d\Sigma$ balayée. Par (7) et (57),

$$\begin{aligned}d\Sigma &= \frac{1}{2} \|\vec{\text{FA}}(t) \times \vec{\text{FA}}(t + dt)\| \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{\text{FA}}(t) \times (\vec{\text{FA}}(t) + d\vec{\text{FA}})\| \\ &= \frac{\sigma}{2\mu} dt\end{aligned}$$

Au final,

$$\dot{\Sigma} = \frac{\sigma}{2\mu} \quad (58)$$

et la deuxième loi de Kepler est démontrée dans un **cadre plus général** d'une force centrale.

On s'intéresse désormais au cas de la force en $\frac{1}{\rho^2}$,

$$\vec{\mathbf{f}} = -\frac{C}{\rho^2} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

attractive (i.e. $C > 0$) où $C = Gm_1m_2$.

L'énergie $E = \frac{1}{2}\mu \vec{\mathbf{v}}^2 - \frac{C}{\rho}$ est conservée. Par (5) et (57),

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho) \quad (59)$$

où $U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{\sigma^2}{2\mu\rho^2} - \frac{C}{\rho}$.

Remarque 6.33. Le graphe de $U_{\text{eff}}(\rho)$ en fonction de ρ est un puits de potentiel.

- (i) Si $E \geq 0$, alors la trajectoire est non bornée.
- (ii) Si $E < 0$, alors entre ρ_m et ρ_M , $\rho(t)$ est périodique. Il s'agit d'un mouvement dans un puits de potentiel. La trajectoire est bornée.

Afin de démontrer la première loi de Kepler, il faut encore compléter la remarque 6.33 en montrant que la trajectoire est fermée et plus particulièrement qu'il s'agit d'une ellipse dont l'un des foyers est occupé par le soleil. ρ_m et ρ_M s'obtiennent en résolvant $E = U_{\text{eff}}(\rho)$ qui sont respectivement le **périastre** et l'**apoastre**.

$$\rho_m = \frac{C}{2|E|} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2\sigma^2 E}{\mu C^2}} \right)$$

$$\rho_M = \frac{C}{2|E|} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\sigma^2 E}{\mu C^2}} \right)$$

Remarque 6.34. $\rho_m + \rho_M = \frac{C}{|E|}$.

Par la loi 6.13, $\mu \dot{\vec{v}} = -\frac{C}{\rho^2} \hat{\rho}$. Par (5) et (57),

$$\begin{aligned} \mu \dot{\vec{v}} &= -\frac{\mu C}{\sigma} \dot{\theta} \hat{\rho} \\ &= \frac{\mu C}{\sigma} \dot{\hat{\theta}} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une nouvelle **loi de conservation** pour les forces en $\frac{1}{\rho^2}$.

$$\dot{\vec{e}} = \vec{0} \tag{60}$$

où $\vec{e} = \hat{\theta} - \frac{\sigma}{C} \vec{v}$ est le **vecteur de Runge-Lenz**.

On introduit un nouveau repère (F, \hat{X}, \hat{Y}) où $\vec{e} = e \hat{Y}$ et $e \geq 0$. On projette \vec{e} sur \hat{X} et \hat{Y} . Par (5),

$$\begin{cases} 0 &= -\sin \theta - \frac{\sigma}{C} \left(\dot{\rho} \cos \theta - \frac{\sigma}{\mu \rho} \sin \theta \right) \\ e &= \cos \theta - \frac{\sigma}{C} \left(\dot{\rho} \sin \theta + \frac{\sigma}{\mu \rho} \cos \theta \right) \end{cases}$$

Ce système peut se réécrire de la manière suivante,

$$\begin{cases} -\frac{\sigma}{C} \dot{\rho} \cos \theta &= \left(1 - \frac{\sigma^2}{\mu C \rho} \right) \sin \theta \\ \frac{\sigma}{C} \dot{\rho} \sin \theta + e &= \left(1 - \frac{\sigma^2}{\mu C \rho} \right) \cos \theta \end{cases}$$

Une combinaison linéaire des ces deux équations donne

$$\rho(\theta) = \frac{\frac{\sigma^2}{\mu C}}{1 - e \cos \theta} \quad (61)$$

qui est l'équation d'une conique.

e est l'excentricité de la conique et on dispose des relations suivantes $\frac{\sigma^2}{\mu C} = a(1 - e^2)$ et $\rho_m + \rho_M = 2a = \frac{C}{|E|}$ pour une conique. Comme $C > 0, \sigma > 0, e > 0$ et $a > 0$, on en déduit que $e < 1$ et les trajectoires sont donc des ellipses ce qui démontre la première loi de Kepler.

On obtient les relations entre les paramètres géométriques et physiques et la conique.

$$|E| = \frac{C}{2a} \quad (62)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\sigma^2}{\mu C^2}} \quad (63)$$

Il ne reste plus qu'à démontrer la troisième loi de Kepler. La trajectoire étant bornée et elliptique, l'aire balayée sur une période de révolution T est $\Sigma = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$. Par (58), $\Sigma = \int_0^T \dot{\Sigma} dt = \int_0^T \frac{\sigma}{2\mu} dt$ et

$$T = \frac{2\pi a^2 \mu}{\sigma} \sqrt{1 - e^2} \quad (64)$$

Par (62) et (ii) de la remarque 6.33, $E = \frac{-C}{2a}$ et par (63), $1 - e^2 = \frac{\sigma^2}{\mu C a}$. On rappelle que $C = Gm_1 m_2$, $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ et par (64),

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{T^2} &= \frac{1}{4\pi^2 a} \frac{\sigma^2}{\mu^2 (1 - e^2)} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{C}{\mu} \\ &= \frac{G}{4\pi^2} (m_1 + m_2) \\ &\simeq \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \end{aligned}$$

ce qui démontre la troisième loi de Kepler dans l'approximation d'une planète de masse $m \ll M_\odot$.

Ceci permet de **peser les soleils** dans cette approximation.